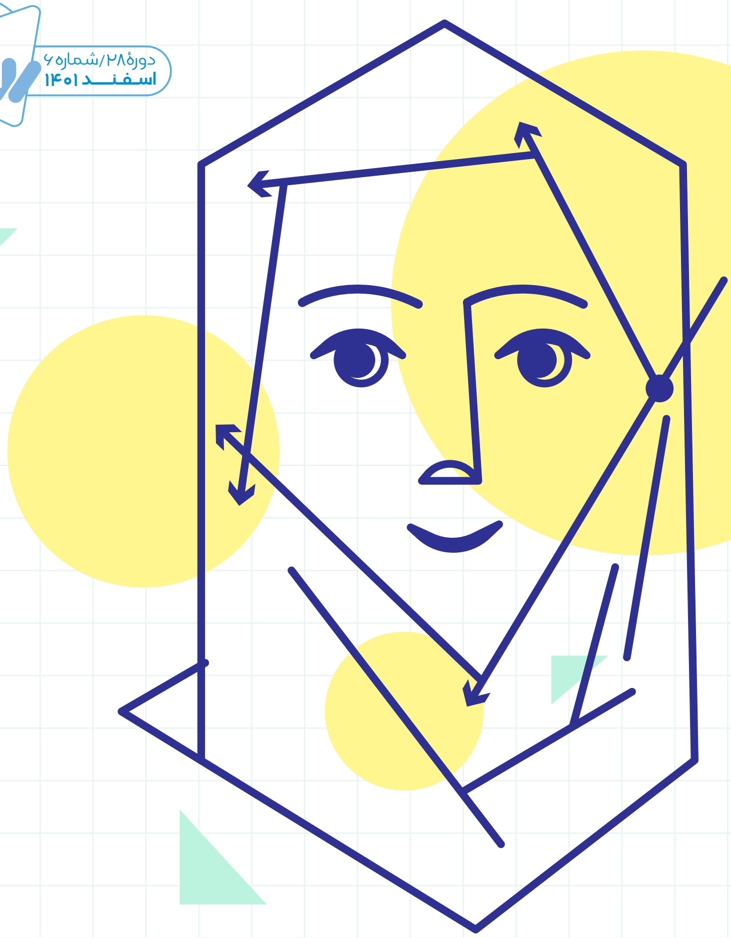


محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

دنیای آینه‌ای؛ نگاهی به کاربردهای تقارن

تقارن

در بخش‌های قبلی با یکی از مهم‌ترین مفهوم‌های هندسی که آن را «تبدیل‌های طولپا» نامیدیم، آشنا شدیم و کاربردی از آن‌ها را در هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دادیم. یکی از مفهوم‌های مهم هندسه که به وسیلهٔ تبدیل‌های طولپا تعریف می‌شود، «تقارن» شکل‌هاست. همهٔ شما ممکن است با تقارن در شکل‌ها به‌طور غیرمستقیم آشنا شده باشید. در کتاب‌های درسی تمام کشورها دانش‌آموزان از همان سال‌های دورهٔ ابتدایی به‌طور غیرمستقیم با تقارن آشنا می‌شوند.
تکرار نمونه‌ها یا الگوها در طبیعت به فراوانی یافت می‌شود. بدن اکثر جانوران یک تقارن دوگانه را نشان می‌دهد. به این معنی که «بازتاب آینه‌ای» دو طرف بدن آن‌ها را جابه‌جا می‌کند. در برگ اکثر درختان نیز می‌توانید این بازتاب آینه‌ای را به‌خوبی مشاهده کنید. حتی دانه‌های برف نیز دارای نوعی تقارن هستند (شکل ۱).
نمونه‌های متفاوتی از تقارن توسط خود انسان ساخته می‌شوند. هنرمندان و معماران در هر دورانی و در هر فرهنگی این تکرار الگوها را در طرح‌های خود به‌کار برده‌اند. مثلاً کاشی‌کاری‌ها نمونه‌هایی از تکرار الگوها هستند.
در کشور خود ما نمونه‌هایی را در معماری، از ایران باستان تا به امروز در شهرهای گوناگون مشاهده می‌کنیم. تکرار این آثار هنری اکثراً تحت‌تقارن صورت می‌گیرد.

شکل۱

دانهٔ برف

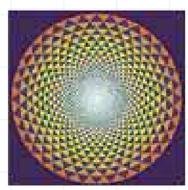
یک طرح ایرانی

واضح است که شناخت تقارن برای درک بهتر طبیعت و فهم مفهوم‌های اساسی علوم دیگر، به‌ویژه زیست‌شناسی، فیزیک و شیمی، به ما کمک می‌کند و از نظر هنری، در زیباشناختی و خلق آثار هنری بسیار مفید است. به‌طور شهودی، نگاه کردن به شکلی که دارای نوعی تقارن است، حتی اگر شناختی از آن تقارن از نظر ریاضی نداشته باشیم، ممکن است حسی را در ما ایجاد کند که بخواهیم به‌نوعی بین اجزای شکل ارتباط برقرار کنیم.


(الف)


(ب)


(پ)


(ت)

شکل ۲

در شکل ۲ در (الف) و (ب) دانه‌های برف را مشاهده می‌کنید. در شکل (پ) طرحی را مشاهده می‌کنید که در فرهنگ‌ها و ادیان مختلف به صورت‌های متفاوت تعبیر و تفسیر می‌شوند. در شکل (ت) نیز یک طرح مارپیچی مشابه دانه‌های گل آفتاب‌گردان را مشاهده می‌کنید. با نگاه کردن به این شکل‌ها ممکن است تصور کنید که بعضی از آن‌ها دارای تقارن هستند و می‌توان با تا کردن کاغذ در راستای یک خط، یک طرف آن‌ها را بر طرف دیگرشان منطبق کرد. این در شکل‌های (الف) و (ب) به‌وضوح مشخص است.

اگر دقت کنیم، در همهٔ این شکل‌ها با چرخاندن، یا به بیان ریاضی، با دوران دادن گرد یک مرکز و با زاویه یا زاویه‌هایی باز، می‌توانیم شکل را بر خودش منطبق کنیم.

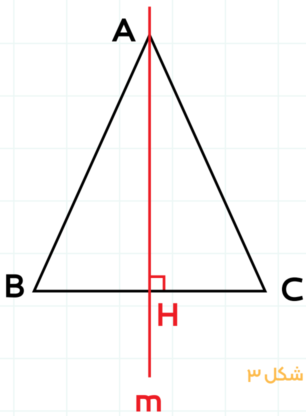
این زاویهٔ چرخاندن را در شکل‌های (الف) و (ب) به‌خوبی می‌توانید درک کنید. به نظر می‌رسد زاویهٔ بین هر شاخه با شاخهٔ بعدی 60° است. مانند آن است که ۳۶۰ را بر عدد ۶ تقسیم کنید.

اکنون با چرخاندن یا دوران‌دادن شکل گرد مرکز آن به اندازهٔ زاویه‌های 60°، 120°، 180°، 240°، 300° و 360°، به نظر می‌رسد شکل بر خودش منطبق می‌شود:

$1\times60^\circ, 2\times60^\circ, 3\times60^\circ, 4\times60^\circ, 5\times60^\circ, 6\times60^\circ$

در شکل‌های (پ) و (ت) تعیین این زاویه‌ها کمی مشکل‌تر می‌شود. اما در شکل‌های (الف) و (ت) این تصور نیز بهتر به ذهن می‌رسد که با تا کردن شکل در راستای یک خط می‌توانیم نیمه‌ای از شکل را بر نیمهٔ دیگری از آن منطبق کنیم. در (الف) و (ب) فکر می‌کنید چه تعداد از این خط‌ها را می‌توانید در نظر بگیرید؟ شاید سه تا از این خط‌ها به سادگی قابل تشخیص باشند، اما سه تای دیگر نیز وجود دارند که برای دیدنشان باید دقت بیشتری به خرج دهید. در واقع در شکل‌های (الف) و (ب) شش خط وجود دارند که به کمک آن‌ها می‌توانیم نیمه‌ای از شکل را بر نیمهٔ دیگر آن منطبق کنیم.

هر چند که در بالا مرتباً روی این مفهوم که به کمک خطی توانستیم نیمی از شکل را بر نیمی دیگر منطبق کنیم تأکید کردیم، اما هدف از نظر ریاضی معنی دیگری دارد که همان مفهوم «بازتاب» است. وقتی مثلث ABC را در صفحه رسم می‌کنیم و صفحه را روی خط m که عمودمنصف ضلع BC است تا می‌کنیم، A که روی خود A قرار می‌گیرد، اما B و C نیز روی یکدیگر قرار می‌گیرند و ضلع‌های $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ نیز بر هم منطبق می‌شوند (شکل ۳). از نظر ریاضی این همان مفهوم بازتاب است که قبلاً با آن آشنا شده‌ایم.



شکل ۳

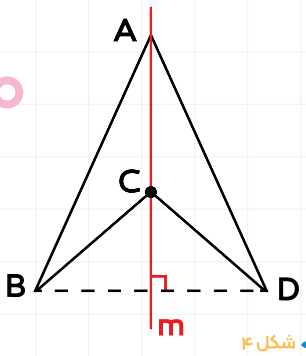
پس می‌توانیم بگوییم، این عمل مانند آن است که بازتاب ΔABC نسبت به خط m بر خودش منطبق شده است.

وقتی خطی در یک شکل وجود دارد که دارای این ویژگی است، بازتاب تحت این خط را یک «تقارن خطی» برای آن شکل می‌نامیم.

در بحث قبلی که شکل را گرد نقطه‌ای دوران می‌دادیم تا بر خودش منطبق شود نیز نوعی تقارن تعریف می‌کنیم که «تقارن دورانی» یا «تقارن چرخشی» نام دارد. با توجه به آنچه در بالا توضیح دادیم، مشاهده می‌کنیم که برای ادامهٔ این بحث دو تبدیل «طولپای بازتاب» و «دوران» نقش اساسی دارند که در بخش‌های قبلی آن‌ها را توضیح داده‌ایم. بنابراین برای ورود رسمی به مفهوم تقارن و بررسی آن از نظر ریاضی، به تبدیل‌های طولپا و به‌ویژه بازتاب و دوران نیاز داریم.

تاکنون متوجه شده‌ایم که تقارن یک شکل تبدیلی یا حرکتی است و به وسیلهٔ آن شکل‌ها بر خودشان منطبق می‌شوند. مفیدترین توضیح در مورد تقارن این است که موقعیت شکل را در نظر بگیریم. سپس بی‌آنکه بکوشیم آن شکل را حرکت دهیم، سعی کنیم به نوعی اجزایی از شکل روی اجزای دیگری از آن منطبق شود؛ به‌طوری که تمام شکل دوباره بر خودش منطبق شود.

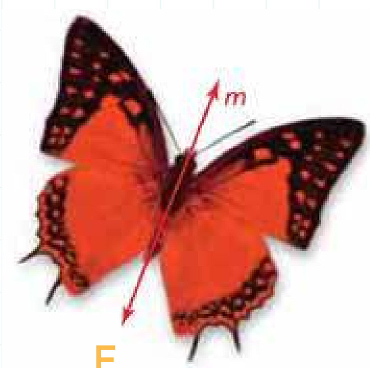
در شکل ۴، خط m عمودمنصف $\overline{BD}$ است. پس داریم: $AB=AD$ و $BC=CD$.



شکل ۴

می‌توانید تصور کنید که با بازتاب شکل نسبت به خط m، هر نقطه از شکل روی نقطهٔ دیگری از آن (ممکن است خود همان نقطه نیز باشد) منطبق شود. در این صورت بازتاب نسبت به خط m را یک «تقارن خطی» شکل و خود خط m را «خط تقارن» یا «محور تقارن» می‌نامیم.

تعریف: شکل F در صفحه مفروض است. هرگاه در صفحهٔ F، یک بازتاب S_m وجود داشته باشد، به‌طوری که: $S_m(F)=F$، یعنی بازتاب یا قرینهٔ F خود F باشد، آن‌گاه S_m را یک «تقارن خطی» شکل F و خط m را «محور تقارن» شکل m می‌نامند.



شکل F

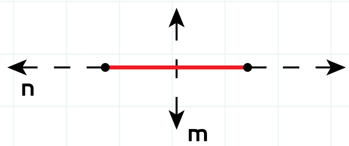
در هر تقارن خطی یک شکل، خط تقارن آن را به دو شکل همنهشت تقسیم می‌کند. بازتاب خطی را تقارن محوری و خط بازتاب را محور تقارن نیز می‌نامیم. در ابتدای بحث مشاهده کردید که به وسیلهٔ دوران گرد یک نقطه نیز می‌توانیم شکلی را بر خودش منطبق کنیم. این نوع دوران را «تقارن چرخشی» یا «تقارن دورانی» می‌نامند. اما چون برای اولین بار با مفهوم تقارن آشنا می‌شویم، ابتدا تقارن خطی را بیشتر توضیح دادیم و در بحث بعدی به تقارن چرخشی می‌پردازیم.

چگونه تقارن‌های یک شکل را در صورت وجود پیدا می‌کنیم؟

پاسخ به این پرسش برای شکل‌های هندسی مانند چندضلعی‌ها چندان سخت نیست. باید خطی را پیدا کنیم که بازتاب هر نقطهٔ شکل نسبت به آن روی خود شکل واقع شود.

بنابراین، دو موضوع مهم در چندضلعی‌ها بسیار کاربرد دارد:

۱. عمودمنصف هر پاره‌خط یک تقارن خطی آن است (شکل ۵).



شکل ۵

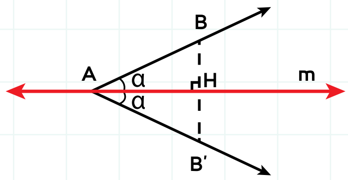
البته هر پاره‌خط دارای دو تقارن خطی است: یکی خط شامل خود پاره‌خط و دیگری عمودمنصف آن پاره‌خط. هر چند این خیلی مهم نیست، اما توجه داشته باشیم که هر خط دارای بی‌شمار تقارن خطی است. (چرا؟)

آیا نیم‌خط دارای تقارن خطی است؟

آیا می‌توانید نشان دهید که هیچ خط عمود بر یک نیم‌خط نمی‌تواند تقارن خطی آن باشد؟

آیا خود نیم‌خط می‌تواند تقارن خطی خودش باشد؟

۲. نیم‌ساز هر زاویه تقارن خطی آن است (شکل ۶).



شکل ۶

چگونه آن را ثابت می‌کنید؟

حل مسئله: باید ثابت کنید بازتاب یا قرینهٔ هر نقطه روی زاویه، نسبت به خط شامل نیم‌ساز زاویه، روی خود زاویه واقع می‌شود. پس هر نقطهٔ دلخواه مانند B روی زاویه در نظر بگیرید، باید نشان دهید بازتاب آن نسبت به m، خط شامل نیم‌ساز، روی خود زاویه است.

اگر شما قرینه یا بازتاب B را نسبت به خط m بیابید و بخواهید ثابت کنید روی ضلع دیگر زاویه است، مسئله کمی مشکل‌تر می‌شود. اما اگر از B بر خط m، خطی را عمود کنید و نقطهٔ تلاقی آن را با خط m نقطهٔ H و با ضلع دیگر زاویه نقطهٔ B' بنامید، ساده‌تر می‌توانید ثابت کنید که B' بازتاب یا قرینهٔ B نسبت به m است. برای اثبات باید نشان دهید: $BH=B'H$.

برای اثبات مساوی‌بودن اندازه‌های دو پاره‌خط، یک روش مهم، استفاده از همنهشتی مثلث‌هاست. آیا می‌توانید دو مثلث پیدا کنید که این دو پاره‌خط دو ضلع آن باشند؟

احتمالاً چندان مشکل نیست که دو مثلث ABH و $AB'H$ را انتخاب کنید.

این دو مثلث بنا بر حالت همنهشتی دو زاویه و ضلع بین همنهشت هستند. (چرا؟) آن دو زاویه و ضلع را مشخص کنید. چگونه از ویژگی نیم‌ساز و عمود بودن آن استفاده می‌کنید؟

بنابراین: $\triangle ABH \cong \triangle AB'H$ نتیجه می‌گیریم: $BH=B'H$.

یعنی قرینهٔ B نسبت به خط m که شامل نیم‌ساز زاویه است، روی خود زاویه واقع می‌شود و این یعنی خط m، خط تقارن زاویه است. پس هر زاویه دارای یک تقارن خطی است.

از دو ویژگی که در بالا بیان کردیم، در تعیین تقارن‌های خطی شکل‌ها به‌طور مرتب استفاده خواهیم کرد. در شمارهٔ بعد در مورد تقارن‌های خطی مثلث و چندضلعی‌ها بحث خواهیم کرد.